

Разбор задач по контрольной работе.

№5, №4, №3 – все типовые (3 балла за каждую)

№2 (5 баллов). Цифровая фотография имеет размер 800*600 пикселей. Она сохраняется как 16-цветный рисунок. Размер файла 215КБ. Найти избыточность рисунка.

Решение: Число элементов рисунка: $N_0=800*600=480000$. Максимальное количество информации, содержащееся в одном элементе $H_{\max}(A)=\log 16=4$ бит/элемент. Среднее количество информации, приходящееся на один элемент, т.е. энтропия: $H(A)=215*8*1024/480000=3.67$ бит/элемент.

Избыточность телевизионного кадра: $\kappa = 1 - \frac{H(A)}{H_{\max}(A)} = 1 - 3.67/4 = 0.08$ или 8,25%

№1 (10 баллов). Датчик температуры выдает показания каждую минуту. Диапазон измерений температуры 0° до 20° с шагом квантования 1°С. Время измерений 5 минут. Найти макс. энтропию датчика температур.

Решение: Максимальная энтропия определяется алфавитом сообщений. Из диапазона измерений можем найти возможное число показаний датчика: $n = \frac{N_{\max} - N_{\min}}{\Delta N} + 1$. Оно равно 21. За пять минут

датчик выдаст пять показаний, в каждый из которых может быть одно из 21 показаний. Т.е. всего возможно 21^5 комбинаций показаний – это и есть алфавит сообщений. Т.к. нет никакой дополнительной информации о формате представляемых данных, то определяем $H_{\max}(A)=\log_2 K = \log_2 21^5 = 21.96$ бит. Или полагая, что за время измерений будет выдано N_t сообщений, каждое из которых несет $\log_2 n$ бит информации, получим аналогичное выражение $H_{\max}(A)=N_t * \log_2 n = 5 * \log_2 21 = 21.96$ бит.

Занятие 7. Помехоустойчивое кодирование

Теория.

Помехоустойчивыми (по другому избыточными или корректирующими) кодами называют такие коды, которые позволяют обнаруживать и исправлять ошибки, возникающие при передаче по каналу связи дискретных сообщений. Это достигается благодаря введению в кодовую последовательность дополнительных (избыточных) кодовых символов, не несущих полезной информации. В n -разрядной кодовой комбинации $\mathbf{k}=\log_2 K$ кодовых символов являются информационными, а $\mathbf{r}=\mathbf{n}-\mathbf{k}$ символов - проверочными (избыточными). Легко заметить, что число разрешенных кодовых комбинаций $N_p=2^k$

Ошибки, возникающие в канале, принято характеризовать параметром $\mathbf{q}$, называемом кратностью ошибки. Если при передаче комбинации 3 разряда изменили свое значение (с 1 на 0 или наоборот), то говорят, что произошла ошибка кратностью 3. Помехоустойчивые коды характеризуются различной обнаруживающей и разрешающей способностью. Это есть максимальная кратность $\mathbf{q}_0$ гарантированно обнаруживаемых ошибок и максимальная кратность $\mathbf{q}_n$ гарантированно исправляемых ошибок. Если $\mathbf{q} > \mathbf{q}_0$ или $\mathbf{q} > \mathbf{q}_n$, то одни ошибки могут быть обнаружены или исправлены а другие - нет.

Значения $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_n$ зависят от основного параметра избыточного кода - минимального кодового расстояния по Хэммингу - $\mathbf{d}_{\min}$.

Определение 2. Расстоянием по Хэммингу $d(b_1, b_2)$ между двумя кодовыми комбинациями b_1 и b_2 называется число позиций этих комбинаций, в которых кодовые символы b_{1i} и b_{2i} не совпадают ($i=1, 2, \dots, n$).

$$d(b_1, b_2) = \sum_{i=1}^n (b_{1i} \oplus b_{2i}), \text{ где знак } \oplus \text{ обозначает логическую операцию «исключающее или»,}$$

результаты выполнения которой представлены ниже:

$$0 \oplus 0 = 0; 1 \oplus 1 = 0; 0 \oplus 1 = 1; 1 \oplus 0 = 1$$

Определение 3. Минимальным кодовым расстоянием $\mathbf{d}_{\min}$ для заданного кода называется минимальное расстояние по Хэммингу между всеми парами разрешенных кодовых комбинаций.

Пусть код обладает определенным $\mathbf{d}_{\min}$. Тогда он позволяет обнаруживать ошибку кратностью $\mathbf{q} < \mathbf{d}_{\min}$. Таким образом, максимальная кратность обнаруживаемых ошибок - $\mathbf{q}_0 = \mathbf{d}_{\min} - 1$. Тот же код позволяет исправлять ошибки кратностью $\mathbf{q} < \mathbf{d}_{\min}/2$. Максимальная кратность исправляемых ошибок:

$$\mathbf{q}_n = (\mathbf{d}_{\min} - 1)/2 \text{ при нечетном } \mathbf{d}_{\min},$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{d}_{\min}/2 - 1 \text{ при четном } \mathbf{d}_{\min}.$$

Все ошибки кратностью $q \leq q_0$ будут гарантированно обнаружены, а ошибки $q \leq q_1$ будут гарантированно исправлены.

Задачи по теме

7.1

Аналоговый сигнал путем дискретизации во времени и квантования по уровню превращается в импульсную последовательность с числом уровней $K=128$. Найти длину кодовой комбинации. Найти избыточность кода, если число разрядов кода увеличить на 3.

Решение: Если длина кодовой комбинации n , то двоичным кодом можно закодировать $K=2^k$ сообщений. Отсюда $k=\log_2 K=7$. Если число разрядов кода увеличить на 3, то в коде будет 7 разрядов, несущих полезную информацию и 3 избыточных разряда. Поэтому избыточность кода будет равна: $\kappa=1-7/10=0.3$.

7.2 (3 балла)

Алфавит источника объемом $K=256$ кодируется 15-разрядным двоичным кодом. Найти избыточность кода, а также число информационных и избыточных разрядов.

Решение: Если длина кодовой комбинации n , то двоичным кодом можно закодировать $K=2^k$ сообщений. Отсюда $k=\log_2 K=8$. Если алфавит кодируется 15-разрядным кодом, то в коде будет 8 разрядов, несущих полезную информацию и 7 избыточных разряда. Поэтому избыточность кода будет равна: $\kappa=1-8/15=0.47$.

7.3.

Комбинации n -разрядного двоичного кода содержат k информационных символов. Определить долю обнаруживаемых и исправляемых таким кодом ошибок из числа всевозможных ошибок.

Решение: Обозначим обнаруживаемые ошибки - $O_{обн}$; исправляемые ошибки - $O_{исп}$; все возможные ошибки - O . Нам необходимо найти $O_{обн}/O$ и $O_{исп}/O$. Найдем сначала количество всех возможных ошибок. Если в коде k инф. символов, то таким кодом можно закодировать $K=2^k$ сообщений. Таким образом, в канал связи передаются K кодовых комбинаций. Назовем их разрешенными и их число обозначим: N_p . На рис. 1 они показаны точками b_{1p} , b_{2p} и т.д. В результате воздействия шума на передаваемые кодовые комбинации (N_p), они могут быть искажены, и тогда будет принята любая кодовая комбинация из числа $N=2^n$. Комбинации кода из числа N не входящие в N_p называют запрещенными комбинациями: $N_z=N-N_p$. Получение приемником такой комбинации говорит о том, что ошибка произошла. На рис. 1 они показаны точками $b_{зап}$.

Пусть была передана кодовая комбинация b_{1p} . При получении любой другой возможной кодовой комбинации кроме b_{1p} будет ошибка. Поэтому число ошибок, которые могут произойти при передаче b_{1p} определится как $N-1$.

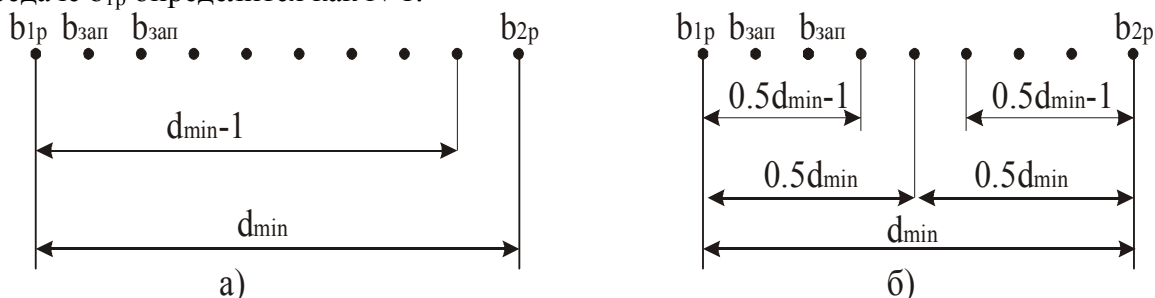


Рис 1. К оценке обнаруживающей а) и исправляющей б) способности кода. b_{1p} ; b_{2p} - разрешенные кодовые комбинации; $b_{зап}$ - запрещенные.

Столько же ошибок может дать и любая другая кодовая комбинация из числа разрешенных. Поэтому общее число возможных ошибок $O=N_p(N-1)$.

При получении кодовой комбинации из числа N_z , ошибка будет обнаружена, т.к. мы заранее знаем, что такая комбинация не может быть передана. Поэтому $O_{обн}=N_p \cdot N_z=N_p(N-N_p)$.

Тогда получим:

$$\frac{O_{обн}}{O} = \frac{N - N_p}{N - 1} = \frac{2^n - 2^k}{2^n - 1} \approx 1 - 2^{k-n}$$

Рис.1б. объясняет принцип исправления ошибок: любая полученная $b_{зап}$ исправляется к ближайшей b_{ip} . Поэтому, если была передана, например, b_{1p} , то верно исправляться будут лишь ближайшие к ней $b_{зап}$ (при $d < d_{min}/2$). Таким образом, общее число верно исправленных ошибок составит N_3 .

Таким образом, получим:

$$\frac{O_{исп}}{O} = \frac{N - N_p}{N_p (N - 1)} = \frac{2^n - 2^k}{2^k (2^n - 1)} \approx \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n}$$

7.4.

Число разрядов кодовой комбинации $n=125$; число информационных символов $k=100$. Вероятность ошибочной регистрации одного кодового символа - $p_0=0.1$. Минимальное кодовое расстояние - $d_{min}=6$. Найти избыточность кода и вероятность ошибочного декодирования всей кодовой комбинации.

Решение:

Избыточность кода: $\kappa=1-k/n=1-100/125=1/5=0.2$.

Помехоустойчивый код решает две задачи: а) обнаружение кодов с ошибками и б) исправление этих ошибок. Ошибочное декодирование означает, что ошибка обнаружена, но не исправлена. Такая ситуация возникает тогда, когда кратность ошибки больше исправляющей, но меньше обнаруживающей способности кода: $q_u < q \leq q_o$.

В нашей задаче $q_u=d_{min}/2-1=6/2-1=2$; $q_o=d_{min}-1=5$. Поэтому вероятность ошибочного декодирования равна суммарной вероятности ошибок кратности 3, 4 и 5:

$$\begin{aligned} P_{о.д.з} &= p_0^3 \Rightarrow P_{о.д.з} = p_0^3 \cdot (1-p_0)^{122} \Rightarrow P_{о.д.з} = C_{125}^3 \cdot p_0^3 \cdot (1-p_0)^{122} \\ P_{о.д.} &= C_{125}^3 \cdot p_0^3 \cdot (1-p_0)^{122} + C_{125}^4 \cdot p_0^4 \cdot (1-p_0)^{121} + C_{125}^5 \cdot p_0^5 \cdot (1-p_0)^{120} \\ P_{о.д.} &= 9.337 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Здесь $1-p_0$ - вероятность правильной регистрации кодового символа; C_n^q - количество комбинаций из n по q , т.е. количество всех вариантов ошибки кратностью q в n -разрядной кодовой комбинации: $C_n^q = \frac{n!}{q!(n-q)!}$ - число сочетаний.

7.5 (5 баллов).

Найти вероятность правильного декодирования кодовой комбинации при $n=125$; $p=0.1$; $d_{min}=6$.

Решение: Правильное декодирование означает правильное обнаружение и исправление ошибок. Для заданного $d_{min}=6$ получим $q_u=d_{min}/2-1=6/2-1=2$. Значит, ошибки кратности 1 и 2 будут обнаружены и исправлены: $P_{п.д.} = C_{125}^1 \cdot p_0^1 \cdot (1-p_0)^{124} + C_{125}^2 \cdot p_0^2 \cdot (1-p_0)^{123} = P_{пд} = 2.096 \cdot 10^{-4}$

7.6. (на дом)

Определить d_{min} для кода, обнаруживающего пятикратную и исправляющего тройную ошибку.

Решение: по определению $q_o \leq d_{min} - 1$, откуда $d_{min} \geq q_o + 1$. В свою очередь, $q_u \leq \frac{d_{min} - 1}{2}$ или $q_u \leq \frac{d_{min}}{2} - 1$, откуда $d_{min} \geq 2q_u + 1$ или $d_{min} \geq 2(q_u + 1)$. Тогда по данным условия задачи d_{min} определяется из системы:

$$\begin{cases} d_{min} \geq q_o + 1 \\ d_{min} \geq 2q_u + 1 \\ d_{min} \geq 2(q_u + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_{min} \geq 5 + 1 \\ d_{min} \geq 2 \cdot 3 + 1 \\ d_{min} \geq 2(3 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_{min} \geq 6 \\ d_{min} \geq 7 \\ d_{min} \geq 8 \end{cases} \Rightarrow d_{min} = 8$$