

Практика. Лаб.р.№5 «Исследование информационных характеристик сообщений»

3.1.

Источник сообщений выдает 4 сообщения с вероятностями $P(a_1)=0.2$; $P(a_2)=0.3$; $P(a_3)=0.4$; $P(a_4)=0.1$. Найти количество информации, содержащееся в каждом из сообщений источника. Вычислить энтропию и избыточность источника.

Решение: Количество информации: $I(a_i) = \log \frac{1}{P(a_i)}$. Отсюда $I(a_1)=\log(1/0.2)=2.33$ бит;

$I(a_2)=1.75$ бит; $I(a_3)=1.33$ бит; $I(a_4)=3.32$ бит. Энтропия источника есть среднее количество информации на одно сообщение:

$$H(A) = \overline{I(a_i)} = \sum_{i=1}^4 P(a_i) * \log \frac{1}{P(a_i)} = 1.86 \text{ бит/сообщ.}$$
 Избыточность источника $\kappa = 1 - \frac{H(A)}{H_{\max}(A)}$,

где $H_{\max}(A)=\log 4=2$ бит/сообщ. Находим избыточность: $\kappa=1-(1.86/2)=0.07$.

3.2.

Телевизионный кадр содержит 625 строк; в каждой строке 833 элемента; каждый элемент имеет 16 градаций яркости. Кадр содержит $9.37 \cdot 10^5$ бит информации. Найти избыточность телевизионного кадра.

Решение: Число элементов в кадре: $N_0=625 \cdot 833=520625$. Максимальное количество информации, содержащееся в одном элементе $H_{\max}(A)=\log 16=4$ бит/элемент. Среднее количество информации, приходящееся на один элемент, т.е. энтропия: $H(A)=9.37 \cdot 10^5 / 520625=1.8$ бит/элемент.

$$\text{Избыточность телевизионного кадра: } \kappa = 1 - \frac{H(A)}{H_{\max}(A)} = 1 - 1.8/4 = 0.55.$$

3.3.

Энтропия источника на входе двоичного симметричного канала $H(X)=1000$ бит/символ. Энтропия на выходе канала - $H(Y)=2000$ бит/символ. Ненадежность канала - $H(X|Y)=200$ бит/символ.

Найти энтропию шума в канале.

Решение: Воспользуемся формулами для связи энтропий на входе и выходе к.с. Тогда, $H(Y|X)=H(Y)-(H(X)-H(X|Y))=2000-(1000-200)=1200$ бит/символ.

3.4.

Энтропия источника на входе двоичного симметричного канала $H(X)=20$ бит/символ, а по каналу передается в среднем $I(x,y)=10$ бит/символ полезной информации. Энтропия шума в канале - $H(Y|X)=40$ бит/символ.

Найти ненадежность канала и энтропию выходных символов. Определить производительность источника и скорость передачи полезной информации по каналу, если на вход канала поступает в среднем $v_k=50$ символ/с.

Решение:

$$H(X|Y) = H(X) - I(x, y) = 10 \text{ бит / символ. } H(Y) = I(x, y) + H(Y|X) = 50 \text{ бит / символ.}$$

$$H'(X) = H(X) \cdot V = 1000 \text{ бит / сек. } I'(x, y) = I(x, y) \cdot V = 500 \text{ бит / сек.}$$

3.5.

Показать, что в симметричном m-разрядном канале без памяти и стираний энтропия шума определяется выражением:

$$H(Y|X) = p * \log \frac{m-1}{p} + (1-p) * \log \frac{1}{1-p}, \text{ где } p - \text{ суммарная вероятность ошибки.}$$

Решение: Воспользуемся общей формулой для энтропии шума:

$$H(Y|X) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m P(x_i) * P(y_j | x_i) * \log \frac{1}{P(y_j | x_i)}$$

Рассмотрим сначала безусловную вероятность $P(x_i)$. Это вероятность появления на входе канала какого-либо из m символов. Так как канал симметричный, то все $P(x_i)$ равны между собой. Поэтому $P(x_i)=1/m$. Теперь определим условную вероятность $P(y_j | x_i)$. Это вероятность того, что

на выходе канала будет символ y_j , при условии, что на входе будет символ x_i . Здесь возможны две ситуации:

- а) верная передача символа по каналу - $i=j$.
- б) неверная передача символа по каналу - $i \neq j$.

Если суммарная вероятность ошибки - p , то вероятность верной передачи символа - $1-p$. Поэтому $P(y_j | x_i) = 1-p$ при $i=j$. Всего случаев верных передач набирается m (по одному на каждый символ).

Рассмотрим случай ошибки. Пусть для определенности был передан символ «1». Тогда вероятность приема любого из m символов не равного «1» будет определяться:

$$P(y_j | x_i) = \frac{p}{m-1} \text{ при } i \neq j,$$

так как канал симметричный (вероятности всех ошибок равны), а p - суммарная вероятность ошибки. Число таких случаев будет $m-1$ для символа «1». Для всех m входных символов число случаев будет $m(m-1)$

Подставляя значения вероятностей в общую формулу энтропии шума, получим:

$$H(Y | X) = m * \frac{1}{m} * (1-p) * \log \frac{1}{1-p} + m(m-1) * \frac{1}{m} * \frac{p}{m-1} * \log \frac{m-1}{p}$$

После сокращения окончательно получим:

$$H(Y | X) = p * \log \frac{m-1}{p} + (1-p) * \log \frac{1}{1-p}$$

3.6.

Найти пропускную способность симметричного m -разрядного канала без памяти и стираний если число передаваемых по каналу символов в секунду $v_k=700$; $m=4$; $p=0.1$.

Решение: Пропускная способность канала: $C = v_k (\max H(X) - H(Y | X))$.

Энтропия шума $H(Y | X)$ была определена в предыдущей задаче. Максимальная энтропия $\max H(X)$ будет при равных вероятностях возникновения всех сообщений $p(a_i)=1/m$. Отсюда следует, что $\max H(X) = m * (1/m) * \log(m)$. Окончательно имеем:

$$C = v_k * \left[\log m - p * \log \frac{m-1}{p} - (1-p) * \log \frac{1}{1-p} \right].$$

$$C = 700 * (2 - 0.1 * \log 30 - 0.9 * \log(1/0.9)) = 962.5 \text{ бит/с.}$$

3.7. (4.1)

По каналу связи передается сообщение, формируемое из восьми символов $b_1, b_2, \dots, b_8$ с вероятностями появления: $P(b_1)=0.2$; $P(b_2)=0.15$; $P(b_3)=0.2$; $P(b_4)=0.15$; $P(b_5)=0.1$; $P(b_6)=0.1$; $P(b_7)=0.05$; $P(b_8)=0.05$. Длительность каждого символа $t_{\text{и}}=0.5$ мс. Шум в канале отсутствует. Определить пропускную способность канала и скорость передачи информации по каналу.

Решение: Поскольку шум в канале отсутствует, пропускная способность канала: $C' = v_k * \max H(B)$; $\max H(B) = \log 8 = 3$ бит; $v_k = 1/t_{\text{и}} = (1/0.5) * 10^3 = 2000$ символов/с. Следовательно $C' = 3 * 2000 = 6000$ бит/с.

Скорость передачи информации $I'(B, B') = v_k * H(B)$, где

$$H(B) = \sum_{i=1}^8 P(b_i) \log \frac{1}{P(b_i)} = 2.85 \text{ бит.}$$

Отсюда: $I'(B, B') = 2.85 * 2000 = 5700$ бит/с.

3.8. (4.2)

Какой запас пропускной способности $C - H'(A)$ должен иметь канал, чтобы при использовании оптимального кода с длительностью кодовой комбинации $T=200$ мс вероятность ошибки $p_{\text{ош}}$ не превысила величину 10^{-6} ?

Решение: Средняя вероятность ошибки при оптимальном кодировании определяется

$$p_{\text{ош}} = 2^{-T[C - H'(A)]}. \text{ Отсюда: } C - H'(A) = -\frac{\log_2 p_{\text{ош}}}{T}$$

$$C - H'(A) = (-6 * \log_2 10) / (-0.2) = 30 * 3.32 = 99.6 \text{ бит/с.}$$